

Adı Soyadı:
Numarası:

23.01.2023

2022-2023 SOYUT MATEMATİK I FİNAL SINAVI SORULARI

1)(9p) $[(p \Rightarrow q') \wedge (q \Rightarrow p')]'$ önermesine denk olan önermeyi bulunuz.

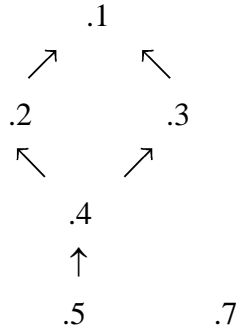
2) (20p) Sırasal eş yapı fonksiyonu, kısıtlanmış fonksiyon, sıraca eş yapı olma bağıntısı, ayrışım nedir? Tanımlayınız. $f: A \rightarrow B$ örten fonksiyonu verilmiş olsun. Her $D \subset B$ için $f(f^{-1}(D)) = D$ olduğunu gösteriniz.

3)(10p) (X, \leq) kısmi sıralı küme, $K, L \subset X$, $K \subset L$ olsun. Bu durumda $\underline{L} \subset \underline{K}$ olduğunu gösteriniz.

4)(16p) a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi üzerinde

' \leq ' bağıntısı $x, y \in A$ için $x \leq y \Leftrightarrow x = y$ veya $x \rightarrow y$ olmak üzere

.6



şeklinde veriliyor. (A, \leq) kısmi sıralı bir küme olduğuna göre $\text{Max } A$, $\text{Min } A$, $\text{EBE } A$, $\text{EKE } A$ 'yı bulunuz.

b)(15p) Tam sıralı küme nedir? Tanımlayınız. (A, \leq) tam sıralı olur mu? (A, \leq) kümesinin 3 zincirini bulunuz.

5)(15p) a) $G = \{\frac{1+2k}{1+2l} : k, l \in Z\}$ olsun. Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı çarpma işlemi G üzerinde bir ikili işlem olur mu?

(15p) b) $B = \{x : x \in R \text{ ve } |x| < |1|\}$ olsun. $m, n \in B$ için $m * n = \frac{m+n}{1+mn}$ olduğuna göre $(B, *)$ cebirsel yapısı grup olur mu?

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Soyut Matematik I Final
Sınavı Cevap Anahtarı

sonu 1)
$$\begin{aligned} & [(p \Rightarrow q') \wedge (q \Rightarrow p')] ' \\ & \equiv [(\bar{p}' \vee q') \wedge (q' \vee p')] ' \\ & \equiv [(\bar{p} \wedge q) \vee (q \wedge p)] \\ & \equiv [(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q)] \\ & \equiv p \wedge q \end{aligned}$$

sonu 2) Tanımlar ders notlarında ayrıntılı olarak verilmiştir. $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilmiştir. Her $D \subseteq B$ için $f(f^{-1}(D)) = D$ olduğunu gösterelim.

Keyfi bir $y \in f(f^{-1}(D)) \Rightarrow y = f(x)$ or $\exists x \in f^{-1}(D)$
 $\Rightarrow y = f(x)$ or $f(x) \in D$
 $\Rightarrow y \in D$

Tersine keyfi bir $y \in D$ alalım.
 $y \in D \Rightarrow y \in B \xrightarrow{\text{fonksiyon}} f(a) = y$ or $\exists a \in A$ vardır

$$\begin{aligned} y \in D & \Rightarrow f(a) \in D \\ & \Rightarrow a \in f^{-1}(D) \\ & \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(D)) \\ & \Rightarrow y \in f(f^{-1}(D)) \end{aligned}$$

Bunadan $D \subseteq f(f^{-1}(D))$... (2) ...
 (1) ve (2) der istenen eşitlik elde edilir.

3) Keyfi bir $x \in L$ alalım.

$$x \in L \Rightarrow \forall l \in L \text{ için } x \leq l \text{ dir.}$$

$$\stackrel{K \subseteq L}{\Rightarrow} \text{ O halde } \forall k \in K \text{ için } x \leq k \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow x, k \text{ için bir alt sıradır.}$$

$$\Rightarrow x \in \underline{K}$$

$$\underline{L} \subseteq \underline{K} \text{ elde edilir}$$

4) a) Max $A = \{1, 6, 7\}$

Min $A = \{5, 6, 7\}$

EBEA ve EKEA yoktur.

b) içindeki her iki eleman bir-biri ile karşılaştırılabilir ise küme tam sıralı kümedir. O halde (A, \leq) tam sıralı değildir. Örneğin 2, 3 ile karşılaştırılmaz. 6 ve 7 diğer her biri ile karşılaştırılmaz.

$$\text{zincir 1} = \{1, 2, 4\}$$

$$\text{zincir 2} = \{1, 3, 4\}$$

$$\text{zincir 3} = \{1, 2, 4, 5\}$$

5) a) $\cdot : G \times G \rightarrow G$ (G, \cdot) bir grup olması

için ilk olarak kapalılığa bakalım.

$$\forall (x, y) \in G \times G \text{ için}$$

$$x = \frac{1+2k}{1+2l} \wedge y = \frac{1+2a}{1+2b} \text{ olsun, } k, l \in \mathbb{Z}$$

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot y = \frac{(1+2k)(1+2a)}{(1+2l)(1+2b)} = \frac{1+2a+2k+4ak}{1+2b+2l+4lb}$$
$$= \frac{1+2(a+k+2ak)}{1+2(b+l+2lb)} \in G$$

İyi tanımlı ise

$$\forall (x,y), (z,t) \in G \times G \quad (x,y) = (z,t)$$

$$\Rightarrow x=z \wedge y=t \Rightarrow x \cdot y = z \cdot t \text{ olur mu?}$$

$$x = \frac{1+2k}{1+2l}, y = \frac{x+z}{z+t} \text{ ifade tanımlıdır.}$$

b) $(B, *)$ birleşmeli olur mu?

$$(m \times n) * k = \left(\frac{m+n}{1+mn} \right) * k = \frac{\frac{m+n}{1+mn} + k}{1 + \left(\frac{m+n}{1+mn} \right) k}$$

$$= \frac{m+n+k+mk}{1+mn+mk+nk}$$

$$m * (n * k) = m * \left(\frac{n+k}{1+nk} \right) = \frac{m + \frac{n+k}{1+nk}}{1 + m \cdot \left(\frac{n+k}{1+nk} \right)} = \frac{m+nk+nk}{1+nk+mn+mk}$$

$(m \times n) * k = m * (n * k)$ olup birleşme öz. sağlanır

$(B, *)$ birimli olur mu?

$\forall m \in B$ için $m * e = m \wedge e * m = m$ eş $e \in B$ var mıdır. Önce deşimelliğe bakalım

$$\forall m, n \in B \text{ için } m * n = \frac{m+n}{1+mn} = \frac{n+m}{1+nm} = n * m.$$

olup $(B, *)$ deşimelidir o halde

$$m * e = m \Leftrightarrow \frac{m+e}{1+me} = m$$

$$\Leftrightarrow m+e = m+em^2$$

$$\Leftrightarrow e - m^2 e = 0$$

$$\Leftrightarrow e(1-m^2) = 0 \quad m \in B \Rightarrow m^2 \neq 1 \text{ old.}$$

$$\Leftrightarrow e = 0 \text{ olup } 0 \in B \text{ dir}$$

$e = 0$ dir.

$(B, *)$ ters eleman öz. var mı?

$\forall m \in B$ için $m * m^{-1} = e$ eş $m^{-1} \in B$ var mıdır?

$$\frac{m+m^{-1}}{1+mm^{-1}} = 0 \Rightarrow m+m^{-1} = 0 \Rightarrow m^{-1} = -m \text{ olup}$$

$-m \in B$ dir o halde $(B, *)$ bir gruptur